

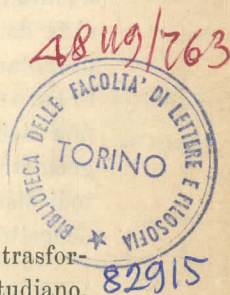
NUOVO MODO
DI SVOLGERE DEDUTTIVAMENTE LA GEOMETRIA PROIETTIVA.

Nota

di MARIO PIERI.

* * *

In tutti quanti i sistemi di Geometria proiettiva le trasformazioni, non aventi poter di modificare le proprietà che si studiano, furon sempre introdotte per via di definizioni nominali o formali; derivandosi infatti la nozione di Omografia da quella di altri enti geometrici fondamentali (Stammegriffe), come il punto, la retta, il raggio, il segmento, il verso, ecc. Nè ciò può far meraviglia, se si considera che la trasformazione omografica — per figure solide almeno — è tal concetto, che non si genera in noi così facilmente all'osservazione del mondo esterno, come quelli dianzi nominati: e nemmeno si può dir con certezza ch'esso abbia luogo realmente allo stato di prodotto dell'intuizione; benchè non ne manchino tracce chiarissime nelle arti rappresentative (prospettiva, scenografia, bassorilievi, etc.). Il contrario avvenne alla Geometria elementare, dove le operazioni del gruppo fondamentale (movimenti, eguaglianze metriche) si tennero fino a questi ultimi tempi per qualcosa di primordiale e di assegnato a priori: onde si preferì determinarle immediatamente a forza d'assiomi e postulati, anzichè cercar di scomporle e di riprodurle in definizioni: il tutto, s'intende, a motivo di quel carattere d'evidenza intuitiva, per cui ci riescon dapprima cotanto accessibili e piane; e quantunque non possa ormai cader dubbio sulla scarsa semplicità loro ideale in paragone d'altri fatti geometrici, per es. dell'omografia.



Certamente sarà da presumere che l'un de' due modi circa il considerare e produrre quelle operazioni fondamentali — cioè come fatti primitivi (indecomposti), o come derivati (composti) — porti seco vantaggi o difetti in più larga misura che l'altro, secondo i fini che ci dirigono e le esigenze che vogliam soddisfare: ma di fronte alla pura speculazione, come agl'intenti universali del metodo strettamente deduttivo, nessuno de' due processi è da condannare a priori, nè da preporre o posporre all'altro senza motivi d'ordine logico. E nella Geometria proiettiva il primo di que' due modi è tuttavia da provare; quantunque a buon dritto ne sia lecito ormai d'istituir la medesima in qualità di dottrina *ipotetico-deduttiva*, come si fa da gran tempo per l'Aritmetica. — Qui appunto ci proporremo di tentar la via nuova: di stabilire in somma la Geometria delle trasformazioni omografiche sul concetto di omografia, non definito altrimenti che per postulati; a somiglianza della geometria del movimento, o geometria elementare, che, giusta i metodi classici, si fa riposare (benchè non sempre esplicitamente) sul concetto a priori della trasformazione di moto (*).

(*) Nè sarà chi sospetti, poter tale idea contrastare a quell'ordine di speculazioni, massimamente analitiche, nei principi della geometria, che va segnalato per nomi insigni come quelli di RIEMANN, HELMHOLTZ, LIE. Più tosto è da credere ch'essa sia per lo meno adombrata in una nota a piè di pagina della "Theorie der Transformationsgruppen", (3ter Abschnitt, s. 524 — Leipzig, 1893), dove si legge che "... die "allgemeine projective Gruppe des R_n ", und die mit ihr ähnlichen Gruppen, die einzigen endlichen continuirlichen Gruppen von Punctktransformationen des R_n sind, bei denen erst $n + 3$ verschiedene Punkte eine Invariante haben. Hieraus folgt, dass zum Aufbau der projectiven Geometrie einer n -fach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit nur ein Axiom erforderlich ist, nämlich dieses: Es giebt in der betreffenden Mannigfaltigkeit eine endliche continuirliche Gruppe von Punctktransformationen, bei der $n + 2$ Punkte keine Invariante haben." — Che lo spazio sia varietà numerica (continua), è assioma primario di quelle classiche investigazioni (ved. p. e. a pagg. 438, 506, 526 dell'op. cit.): laddove un tal fatto non si riscontra in questo saggio prima del XX ed ultimo principio; e non hanno qui alcun ufficio le nozioni generiche di "curva", e di "superficie", spettanti meglio all'"Analysis situs", che non alla G. P., o alla G. El.

Sotto quali condizioni un gruppo continuo e finito G di trasformazioni reali dello spazio analitico sarà simile al massimo gruppo proiettivo di questo, se debbono esser veri per G gli assiomi (nostri) VII e VIII — o principi non molto diversi?

* *

Accanto all'omografia — che designamo per “ Ω ” — se non prima di essa, porremo l'idea generale di punto proiettivo — rappresentata in “[0]” — alla quale l'omografia si coordina quale trasformazione di punti in punti; ma di queste due sole nozioni fondamentali — determinate sol quanto occorre da un certo ordine di postulati, e nel resto arbitrarie; e col soccorso delle categorie logiche più generali (individuo, classe, pertinenza, inclusione, rappresentazione, negazione, e poche altre) comuni e, si può dir, necessarie a qualunque umano discorso — comporremo ogni altro ente geometrico-proiettivo mediante definizioni prettamente nominali: senza oltrepassar nondimeno quella misura d'estensione e di particolari, che può aversi bastante a provare la possibilità di svolgere dalle nostre premesse tutta quanta la G. P.

L'indagine è molto agevolata a chi scrive da un suo recente lavoro su “i principi della Geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo” (*), nel quale si assunsero a primitive le idee di “punto” e di “congiungente due punti”. Ma il sistema, che sarà qui delineato a gran tratti, offre al certo per la maggior novità un maggior campo ad elaborazioni e semplificazioni ulteriori. Gioveranno alcuni confronti e ravvicinamenti con quella memoria — che mi fo lecito ricordare nel segno m_4 — e ad essa dovrò richiamarmi (e mi richiamo una volta per sempre) all'effetto di giustificare qualche asserzione gratuita, e di passar sopra molte inutili ripetizioni.

Se il nuovo sistema è scarsamente intuitivo ne' suoi principi — da che non par facile procacciarsi ab inizio un'interpretazione concreta del “moto proiettivo” — questo difetto potrà rimaner compensato, pur nei riguardi estrinseci dell'insegnamento, dalle semplificazioni veramente notevoli che si riscontran qui d'ogni parte: tanto che ne sarebber tolte di mezzo le maggiori prolissità e scabrosità che si oppongono per solito alla sposizione della Geometria proiettiva in forma rigorosamente ipotetica. Basti l'esempio del teor.^a di STAUDT. Dal momento che non si definisce l'omografia — da certi giudizi in fuori, sufficienti bensì a qualificarla in ordine

(*) Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, XLVIII, 1897-98.

*Il nuovo
sistema
delle fondamentali
idee
geometriche
e
proiettive
è
il
punto
proiettivo*

*Categorie logiche
individuo
classe
Pertinenza
Inclusione
Rappresentazione
Negazione*

Definizioni nominali

*altro sistema
delle primitive
idee
il punto
e
la congiungente
due punti*

Posizione

ai fini ordinari — un de' caratteri da postulare, come più semplici e meglio appropriati a determinarne il concetto, potrà naturalmente esser quello che or si dimostra nel teor.^a *fondamentale*, cioè che “se tre punti d'una retta proj.^a sono obbligati a star fermi, nessun punto di questa si può mover proiettivamente”. Per ciò non è tal giudizio men semplice in fondo, nè più straordinario di quel che s'impone al moto euclideo con l'assioma: “tutti i punti d'una retta stian fermi, allorchè due sono immobili”. — Altre non meno rilevante vantaggio si è la facoltà di trattare la Geometria proiettiva delle forme di 1°, 2°, 3°, ... ordine — per la più parte almeno — indipendentemente da qualunque nozione di continuità; non occorrendo mai distinzione fra punti razionali e irrazionali, fuorchè per rappresentare la retta proiettiva sul continuo numerico reale (ordinario): rappresentazione che qui, meglio forse che altrove, si manifesta come superflua e quasi straniera agli uffici essenziali della Geometria di posizione. Ond'è che per questa via si potrà liberamente tacere di tutto che abbia attinenza alla continuità delle forme; o quanto meno ci sarà dato il poter differire questo soggetto ad libitum.

**

Il segno “[0]” volgasi in “*punto proiettivo*”, e il segno “ Ω ” in “*trasformazione omografica*”. Libertà di congiungere a queste parole, come a que' segni, un contenuto arbitrario: purchè piaccia conceder man mano que' postulati che si propongono. Queste proposizioni fondamentali o primitive saranno contrassegnate da numeri romani: mentre i teoremi che se ne posson dedurre, le definizioni, ecc., si distingueranno in P1, P2, ... ecc. (*).

(I)

[0], $\Omega \in \mathbf{K}$. — Vale a dire “*Il punto proiettivo e l'omografia sono classi di enti: [0], al par di Ω , è un nome comune*”.

(*) Circa il valore de' pochi segni logici che qui si adducono (nel proposito di escludere qualunque incertezza od ambiguità dall'interpretazione di certe proposizioni) si può consultare ad es. il *Formulaire de mathématique* publié par la “*Rivista di matematica*”, vol. II, § 1 (*Logique mathématique* par G. PEANO) — Torino, Bocca, 1897.

(II)-(III)

$\mathfrak{H}[0]$. “Esiste almeno un punto proiettivo „. Inoltre: $a \varepsilon [0]$. $\mathfrak{O}$. *Individuo*.
 $\mathfrak{H}[0] - \iota a$. “Se a è un punto proiettivo, esiste tuttavia un punto
 “non coincidente con a „.

(IV)

$\Omega \mathfrak{O}[0] f[0]$. Cioè: “Qualunque omografia sarà trasforma-
 “zione di punti proiettivi in punti proiettivi, ossia rappresen-
 “tazione della classe $[0]$ sopra sè stessa. — Dal supporre a sia un
 “punto proiettivo ed ω un'omografia, si deduce: ωa è un punto
 “proiettivo „. Dunque la trasformazione omografica agisce sopra
 ogni punto (opera in tutto lo spazio) (*).

(**) Ved. p. e. m_4 , pagg. 5-6, 43-4. Il termine “figura „ sarà sino-
 nimo di “classe di punti proiettivi „, “ $K[0]$ „: onde “[0] „ è la “massima
 figura „ o “spazio proiettivo „. — Due figure diconsi “eguali „ o “coin-
 cidenti „, se ogni punto dell'una spetta anche all'altra reciprocamente
 (se ciascuna è “contenuta „ nell'altra). Due punti proiettivi “coinci-
 dono „, se l'uno giace in ogni figura che passi per l'altro; e il contrario
 s'esprime dicendo ch'essi sono “distinti „, o “diversi „, fra loro. Se a è
 un punto proiettivo “ ιa „ sta per la classe dei punti coincidenti con a .
 — Il verbo “appartenere, spettare „, significato da G. PEANO in “ ε „,
 denota pur nel comune linguaggio la relazione dell'individuo alla classe,
 de' soggetti ai predicati d'una proposizione particolare semplice o com-
 plessa; ma il discorso ordinario consente al medesimo ufficio anche le
 forme “stare, giacere „ (o recipr.^e contenere, passare) ed altre molte, tutte
 capaci eziandio di significare l'“inclusione „, fra classi, cioè la relazione
 espressa coi giudizi universali del tipo “ogni P è Q „ ($P \supset Q$).

Il segno generico “ f „, tradotto nelle parole “trasformazione, rappre-
 sentazione „, congiunge sempre due classi, fra cui s'interpone, ed in-
 volge che l'una (a sinistra) sia immagin dell'altra; cioè la rispecchi
 secondo una legge arbitraria: per modo che ciascun individuo di questa
 (a dritta) richiami un certo individuo di quella. Si sottintende, come
 nell'idea generale di *funzione*, che da un individuo dato a piacere nella
 classe a destra di f — o da più individui eguali rispetto alla medesima,
 come sarebber più punti coincidenti — la nostra mente sia portata
 sopra un solo individuo dell'altra — o sopra individui tutti eguali fra
 loro in questa — (*univocità*): ma la scambievolezza delle due classi
 (*reciprocità*) non è presupposta. — Se μ sarà una “trasformazione di
 punti proj. „ (una “[0] f [0] „) ed u una figura, l'immagine di u secondo μ
 sarà eziandio una figura, da chiamarsi “ μu „. Ecc., ecc.

(V)

$\omega \in \Omega$. $\mathcal{O}$. $\overline{\omega} \in \Omega$. “ L'operazione inversa di un'omografia è ancora un'omografia. Se a' è un punto proiettivo ed ω un'omografia, “ esisterà un punto proiettivo a per cui $a' = \omega a$ (se più d'uno, co- “ incideranno) „ — Sicchè l'omografia sarà trasformazione reciproca, o corrispondenza biunivoca [I, IV, V].

(VI)

$\mu, \nu \in \Omega$. $\mathcal{O}$. $\nu \mu \in \Omega$. “ Due trasformazioni omografiche successiva- “ mente eseguite — la seconda, ν , su quel che risulta dalla prima, “ μ — fanno il medesimo effetto di una certa omografia, risul- “ tante o prodotto delle due „.

Dunque [I, IV-VI] le omografie costituiscono un “ gruppo di tras- formazioni „ nell'odierno e più general significato del termine. Ma i caratteri peculiari a questo gruppo, le qualità sufficienti a distin- guerlo da ogni altra classe congenere di trasformazioni, si espri- meranno dai postulati seguenti, tra cui primeggiano d'importanza deduttiva il VII, l'VIII, il XIII, XIV, XV.

(VII)

$a, b \in [0]$. $a - = b : \mathcal{O}$. $\mathfrak{H} \mathbf{K} [0] \wedge \overline{u} \in \{ \mathfrak{H} [0] - u . \mathfrak{H} u - : a - : b : \} . \therefore \mu \in \Omega . \mu a = a . \mu b = b : \mathcal{O} \mu . \mu u = u$. Cioè “ Sol che a, b siano “ punti proiettivi distinti, esiste per certo una qualche figura u così “ fatta, che 1) fuor d'essa giaccia per lo meno un punto proiettivo “ (u non coincida con $[0]$, non sia la massima figura, o spazio pro- “ jettivo); 2) per lo meno un punto proiettivo diverso da a da b “ giaccia in u (u non sia vuota di punti, nè si restringa tutta nella “ classe dei punti che coincidono con a o con b indistintamente, op- “ pur con un solo dei due); 3) u si trasformi in sè stessa (ciascun “ punto di u si specchi in un punto di u) per qualunque omografia “ che rappresenti in sè stesso ciascuno dei punti a e b „ — Con questo principio si ammette in somma, per ogni coppia di punti di- stinti a e b , l'esistenza di un certo covariante rispetto al gruppo Ω .

(VIII)

$a, b \in [0]$. $a - = b . x, y \in \mathbf{K} [0] \wedge \overline{u} \in \{ \mathfrak{H} [0] - u . \mathfrak{H} u - : a - : b : \} . \therefore \mu \in \Omega . \mu a = a . \mu b = b : \mathcal{O} \mu . \mu u = u \} : \mathcal{O} . x = y$. “ Se a e b

“ siano punti proiettivi distinti, ed x, y figure quali dianzi u ,
 “ queste coincideranno in una sola „. — Oppure: “ Non posson coe-
 “ sister figure distinte fra loro, e ciascuna obbediente alle prescri-
 “ zioni 1), 2), 3) del VII assioma, sotto la stessa ipotesi di que-
 “ sto „ (*). — Cosicchè [VII, VIII] due punti a e b , purchè non
 coincidenti, comportano sempre un covariante rispetto ad Ω ;
 ed anzi uno solo; fatta astrazione dagli enti $[0]$, Δ (il nulla), e
 dalle figure “ a „, “ b „, “ $a \cup b$ „. Ben s'intende come quella
 figura, inerente alla coppia di punti a e b , si possa già designare
 qual retta proiettiva congiungente a con b , giusta la seguente
 definizione.

P 1.

$a, b \in [0] . a - = b : \mathfrak{O} . a b \equiv \bar{\iota} \{ \mathbf{K} [0] \cap \overline{u \varepsilon} (\mathfrak{H} [0] - u . \mathfrak{H} u - \iota a -$
 $- \iota b : . \mu \varepsilon \Omega . \mu a = a . \mu b = b : \mathfrak{O} \mu . \mu u = u) \}$. Vale a dire: “ Pre-
 “ messo che a e b sian punti proiettivi distinti, con “ $a b$ „ — da leg-
 “ gersi p. e. “ congiungente a con b „ — denotiamo quell'unica
 “ figura u , che non può complessivamente mutare per qualsivoglia
 “ trasformazione omografica, la qual tenga fermo ciascuno de' punti
 “ a e b ; e che, senza comprender tutti i punti che esistono, ab-
 “ bracci almeno un punto diverso da a e da b „. — Di qui tosto,
 per la simmetria rispetto ad a e b :

P 2.

$\text{HpP1. } \mathfrak{O} . a b = b a$. “ Sotto la stessa ipotesi (della P1), le con-
 giungenti a con b e b con a coincidono „. — Inoltre [VII, P1, ecc.]:

(*) Atteso che in (VIII) la tesi non contiene i punti a e b , si può
 dare a questo principio la forma:

$x, y \in \mathbf{K} [0] - \iota [0] . \mathfrak{H} (a, b) \varepsilon \{ a, b \in [0] . a - = b . \mathfrak{H} x - \iota a - \iota b . \mathfrak{H} y - \iota a -$
 $- \iota b : . \mu \varepsilon \Omega . \mu a = a . \mu b = b : \mathfrak{O} \mu : \mu x = x . \mu y = y \} : \mathfrak{O} . x = y$. Cioè: “ Due
 figure x, y , nessuna delle quali occupi per sè tutto lo spazio, coin-
 cideranno, se esistono due punti distinti a e b di tal sorta, che tanto x
 quanto y comprenda un qualche punto diverso da a e da b ; e qualsi-
 voglia omografia, che specchi ciascuno de' punti a e b su sè stesso, dia
 sempre x per immagine ad x , ed y ad y „. — Altro giudizio equivalente
 ad (VIII) sarà p. es: $\text{Hp(VIII). } x \mathfrak{O} y : \mathfrak{O} . y \mathfrak{O} x$; dal quale invero con-
 segue l' VIII principio: perchè (a tenor degli assiomi logici sulle classi
 o figure) l'ipotesi “ $x, y \in \mathbf{K} [0]$ „ coinvolge sempre $x \mathfrak{O} x \cup y$.

P 3.

HpP1. $\mathcal{O} : \mathfrak{H} [0] - ab. \mathfrak{H} ab - : a - : b$. " Sempre che a e b " siano punti distinti, è forza ch' esistano punti fuor della congiungente a con b , e punti di questa non coincidenti con a o con b „.

P 4.

" E ciascuno dei punti a e b dovrà stare nella congiungente a con b „ [Invero, grazie a P1, l'ipotesi dell'assioma VIII rimarrà soddisfatta, quando in luogo d' x, y si legga " ab „ e " $ab \cup : a \cup : b$ „; onde $ab = ab \cup : a \cup : b$, ecc.]. Ancora:

P 5.

$a, b, c, d \in [0]. c = a. d = b : \mathcal{O}. ab = cd$. [Da IV, P1 e dagli attributi dell'eguaglianza. Ved. m_4 , pag. 7].

P 6.

$a, b \in [0]. a - = b. \mu \in \Omega : \mathcal{O}. \mu(ab) = (\mu a)(\mu b)$. Ovvero: " Qual si " voglia omografia μ che traduca i punti (distinti) a e b nei punti " a' e b' , trasformerà la congiungente a con b nella congiungente " a' con b' „. [In vero, posto $a' = \mu a, b' = \mu b$, nessun' omografia ν per la quale sia $\nu a' = a', \nu b' = b'$ avrà poter di alterare la classe $\mu(ab)$. Perchè, ove fosse $\nu\mu(ab)$ non uguale a $\mu(ab)$, ne verrebbe — eseguendo l'operazione inversa di μ sopra ambedue le figure, in forza di (IV) e (V) — che $\bar{\mu} \nu \mu(ab)$ non sarebbe uguale ad ab : cosa non vera, dal momento che l'omografia $\bar{\mu} \nu \mu$ lascia fermo ciascuno de' punti a e b : ved. P1, (VI), ecc. Sono pur soddisfatte le condizioni $\mathfrak{H} [0] - \mu(ab), \mathfrak{H} \mu(ab) - : a' - : b'$; e però si conclude $\mu(ab) = a'b'$, grazie ad $(\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b})$ P1 ed (VIII)].

P 7.

$a, b \in [0]. a - = b. c \in ab - : a - : b : \mathcal{O}. ab - : a - : b = [0] \wedge z \in \mathfrak{H} \Omega \wedge \mu \in (\mu a = a. \mu b = b. \mu z = c)$. " Premesso che a, b sono " punti proiettivi distinti, e c è un ab diverso da a e da b , si deduce che — tolti i punti a e b — la figura ab sarà il luogo d'ogni " punto z , per cui si possa certificar l'esistenza d'una trasforma- " zione omografica che porti z in c , senza toccare a nè b „. [Invero l'ipotesi del postulato VIII ne risulta verificata per le figure $x \equiv ab$ (P1), $y \equiv : a \cup : b \cup : z \in [\mathfrak{H} \Omega \wedge \mu \in (\mu a = a. \mu b = b. \mu z = c)]$: onde $x = y$. A provar che $\nu y = y$, per qualsivoglia omografia data ν la quale non muti a nè b — ossia che la condizione $\mathfrak{H} \Omega \wedge \mu \in (\mu a = a. \mu b = b. \mu z = c)$ vien trasformata in sè stessa da ν — si

consideri 1) che s'esiste μ per cui $\mu z = c$, dovrà esser $\mu' \equiv \overline{\mu v}$ che porti vz in c ; 2) e se esiste μ' che porti vz in c , esiste ancora $\mu \equiv \mu'v$, che porta z in c . Ecc.].

*
* *

L'ente "[1]", ossia la "retta proiettiva", si può definir come "classe di tutte le congiungenti possibili" — vale a dire in somma:

P 8.

$[1] \equiv \mathbf{K}[0] \wedge \overline{u} \in \{ \mathbf{H}[0] - u . \mathbf{H}(\overline{a, b}) \in (a, b \in [0] . a - = b . \mathbf{H} u - = : a - : b . \therefore \mu \in \Omega . \mu a = a . \mu b = b : \mathbf{O} \mu . \mu u = u) \}$. "Retta proiettiva" è ciascuna figura covariante, rispetto all'omografia, "di qualche coppia esistente di punti proiettivi l'un l'altro diversi a e b : tranne sempre lo spazio ed il nulla, covarianti d'ogni figura, e le tre classi costituite in uno o due di que' punti". — Ma perchè nella retta concorrano le proprietà consuete, ci sembrano da postulare i due princípi seguenti:

(IX-X)

$a, b \in [0] . b - = a . c \in ab - : a : \mathbf{O} : b \in ac . ac \mathbf{O} ab$. Cioè: "Sempre che a, b sian punti proiettivi, b non coincidente con a , se avviene che un punto c appartenga alla congiungente a con b senza coincider con a , bisognerà che il punto b stia nella congiungente a con c , e questa sia contenuta nella congiungente a con b ." ($\mathbf{m}_4$, pag. 9-10).

Qualunque giudizio portato sugli enti derivati o composti si risolve in proposizioni negli enti non definiti. Così è in (IX-X): dove i segni ab, ac compariscono soltanto a guisa di abbreviazioni; e per tanto ciò che si afferma di questi ricade sugli enti primitivi $[0]$ ed Ω . — Da IX-X procede ($\mathbf{m}_4$, pag. 10-11) il teorema:

P 9.

"Dato che a, b sian punti proiettivi non coincidenti, e che c, d sian punti proiettivi appartenenti ad ab ma diversi fra loro, sarà necessario che le congiungenti ab e cd coincidano."

Le nozioni di "allineamento" e di "piano proiettivo" si possono definire conforme all'uso, cioè:

P 10.

“Essendo a, b, c punti proiettivi, con una qualunque delle dizioni “ a, b, c collineano”, “ (a, b, c) C1”, “ a, b, c sono allineati”, si esprime il fatto, o giudizio, significato in questi termini: esistono due punti proiettivi x, y fra loro distinti e tali, che a, b, c stiano insieme nella congiungente x con y . ”

P 11.

“Posto che a, b, c sian punti proiettivi non allineati, e in conseguenza distinti, la “congiungente a con bc ”, o il “piano proiettivo a, b, c ” — o, più brevemente, la figura “ abc ” — non è altro che il luogo d’ogni punto x per cui si verifichi nella retta bc l’esistenza d’un punto y tale, che x appartenga ad ay . “E l’ente generico “piano proiettivo”, si rappresenta con “[2]”.

Le molte proprietà che si svolgono dalle proposizioni seguenti: “Ciascun piano proiettivo è individuato da tre de’ suoi punti a piacere, purchè non allineati. ” — “La retta che unisce due punti, non coincidenti, d’un piano giace tutta in esso. ” — “Due rette proiettive giacenti nel medesimo piano s’incontrano ”: nascono ormai tutte quante da ciò che precede e dall’appresso principio (come può vedersi in m_4 , § 3):

(XI)

“Se a, b, c son punti proiettivi non allineati, e inoltre a' è un “ bc diverso da b e da c , b' è un “ ac diverso da a e da c , allora le “congiungenti a con a' e b con b' s’incontrano. ” — Dal quale, in virtù di P 1, 3, 9, si deduce altresì che:

P 12.

“Nel piano abc , che unisce tre punti non collineari a, b, c , e “fuor di ciascuna delle bc, ca, ab si trova un punto almeno ”.

Ove poi si conceda il seguente:

(XII)

“Se a, b, c sono punti proiettivi non collineari, esiste almeno “un punto fuor del piano proiettivo abc ”

si potrà senza più dimostrare il teorema dei triangoli omologici, o teor. di DESARGUES (*).

(*) Ved. p. e. STAUDT, *Die Geom. der Lage*, nn. 87 e 90.

*
*
*

Di capitale importanza i tre princípi seguenti:

(XIII)

$r \in [1], a, b, c, d \in r. a - = b. b - = c. c - = a: \mu \in \Omega. \mu a = a. \mu b = b. \mu c = c. \therefore \Omega. \mu d = d.$ “ Qual si voglia omografia che trasformi in sè stesso ciascuno dei punti a, b, c l'un l'altro distinti, e tutti e tre appartenenti ad una retta proiettiva r , dovrà tener fermo “ eziandio qualunque altro punto di r . ”

(XIV)

$r \in [1]. a, b, c, d \in r. a - = b. b - = c. c - = a. o \in [0] - r. \mu \in \Omega. \mu(oa) = oa. \mu(ob) = ob. \mu(oc) = oc: \Omega. \mu(od) = od.$ “ Sopra “ una retta proiettiva r giacciono i punti distinti a, b, c e un “ quarto punto d ; poscia o sia un punto escluso da r : qualunque “ omografia che trasformi in sè stessa ciascuna delle oa, ob, oc “ dovrà eziandio tener ferma l'altra retta od . ” — Insomma: “ Se tre diverse rette d'un piano concorrono in o , qualunque trasformazione omografica, per cui nessuna delle tre rette si muova, converte in sè stessa ogni retta del piano, che passi per o . ”

(XV)

“ Dati i punti a, b, c, d , e da una parte, e dall'altra i punti a', b', c', d', e' ; e posto che nessun piano passi per quattro di quelli “ o per quattro di questi: esiste un'omografia che trasforma gli uni “ negli altri ordinatamente ”.

Per certo l'assioma XV non è irriduttibile; anzi poco ci vuole a spezzarlo in tre o quattro proposizioni distinte. Ma qui non si tratta d'analisi; bensì di comporre sommariamente in una sintesi nuova gli elementi della G. P. — L'esistenza di omografie non può revocarsi in dubbio dopo l'ultimo principio, di cui non è assurda l'ipotesi, date le P 1, 3, 12 e (XII); ma potrebbe negarsi prima: nè perciò rimarrebbero punto infirmate le premesse I-XIV, comechè il lor contenuto si riducesse in fondo a ben poco. — Il seguente principio conferisce allo studio dell'omografia involutoria e delle forme armoniche:

(XVI)

$a, b, c \in [0]$. (a, b, c) — Cl. $d \in abc - bc - ca - ab$: O. $(ab \wedge cd, ac \wedge bd, ad \wedge bc)$ — Cl. “Non può darsi che i tre punti diagonali d'un quadrangolo piano sian per diritto.” — Ovvero: “Essendo m, n punti proiettivi distinti, p un mn diverso da m e da n , l'“armonico ad m, n, p ” — o “coniugato armonico di p rispetto ad m, n ” — non coincide con p .”

I postulati I-XVI bastano già per produrre le cose più notevoli dei comuni trattati circa l'omografia nelle forme fondamentali di 1^a, 2^a, e 3^a specie; fatta eccezione per ciò che si suol riguardare da alcuni come attributo della connessione (ved. appresso, pag. 15, 16). Pochi esempi verranno qui a confermare questo giudizio.

P 13.

“Se a, b, c, d sono punti d'un piano, ma non collineano (a, b, c) , nè (a, b, d) , nè (a, c, d) nè (b, c, d) ; e così sono anche a', b', c', d' ; esiste un'omografia che ad a, b, c, d rispettivamente coordina “i punti a', b', c', d' .” [Tolgasi un punto e fuor del piano abc (P11, XII), e sulla retta de un punto f distinto sì da e che da d (P3); e il simile facciasi in ordine ad a', b', c', d' . L'omografia che, giusta XV, porta gli a, b, c, e, f negli a', b', c', e', f' porterà d su d' (P6, 11 ecc).]

P 14.

“Dati tre punti distinti a, b, c nella retta r , e tre punti distinti a', b', c' , nella retta r' , esiste un'omografia che muta ordinatamente “gli uni negli altri: e se μ, ν sono due omografie come quella, ed “ x è un punto qualsivoglia di r , sarà sempre $\mu x = \nu x$.” [La prima parte è contenuta in P13, come P13 in XV. Il resto procede da XIII: perchè da $\bar{\nu}\mu a = a, \bar{\nu}\mu b = b$ e $\bar{\nu}\mu c = c$ si deduce $\bar{\nu}\mu x = x$, vale a dire $\mu x = \nu x$.]

P 15.

“Nell'ipotesi che regge P13; se tanto μ quanto ν saranno “omografie che conducono gli a, b, c, d negli a', b', c', d' , bisogna “che μ e ν si equivalgano quanto all'effetto sul piano abc .” [Per “ogni punto x allineato con due de' punti a, b, c, d , p. es. a e b , sarà $\mu x = \nu x$ (P14): perchè così μ , come ν , conduce i punti $a, b, a \wedge b \wedge c \wedge d$ nei punti $a', b', a' \wedge b' \wedge c' \wedge d'$. Per qualunque altro punto

x di abc si consideri che la trasformazione $\bar{\nu}$ terrà ferme le rette ab, ac, ad, bc, bd , e p. cons. anche le ax, bx in virtù di XIV: onde $\mu(ax \cap bx) = \nu(ax \cap bx)$, vale a dire $\mu x = \nu x$.]

P 16.

“Se due rette distinte r, r' son riferite fra loro punto per punto “in modo, ch'esista fuor di ciascuna un punto o (centro di *prospettiva*) allineato con ogni singola coppia di punti omologhi “questa corrispondenza fra r, r' sarà un'omografia tra le medesime.” [Cioè, detta ρ la trasformazione in parola, deve esistere un'omografia μ per la quale $\mu x = \rho x$, qualunque sia il punto x , purchè giacente in r . Invero, presi comunque su r i punti distinti a, b, c , esiste un'omografia μ (P13) che porta i punti o, a, b, d rispettivamente nei punti, $o, \rho a, \rho b, d'$ — posto che d appartenga, come d' , ad oc senza cadere in c , nè in o . Ora, poichè μ tiene ferme le rette oa, ob, oc , ne viene (XIV) che il punto μx dovrà cadere in quel punto di r' che giace in ox , vale a dire nel punto ρx .]

P 17.

“Qualsivoglia omografia ν che trasformi la retta proiettiva r in “un'altra r' diversa da r , e un punto a della prima in sè stesso, rap- “ presenterà *prospettivamente* l'una retta sull'altra.” [Siano b e c due punti di r , ambo distinti fra loro e da a (P3, 8); b' e c' i loro trasformati per ν , che saranno eziandio diversi fra loro e dai precedenti a, b, c : le rette bb' e cc' si taglieranno in un punto o fuor di ciascuna delle r, r' (XI etc.). Dunque, preso a piacere un punto x della r , esiste (P16) un'omografia μ per la quale $\mu a = a, \mu b = b', \mu c = c'$ ($x, \mu x, o$) C1 (P10): e il Tr. sarà dimostrato, se proveremo che $\nu x = \mu x$. Ora, detta $\bar{\mu}$ come al solito la trasformazione inversa di μ , sarà per quanto precede $\bar{\mu} \nu a = a, \bar{\mu} \nu b = b, \bar{\mu} \nu c = c$; e di qui nasce appunto (XIII) che $\nu x = \mu x$.]

Similmente a P16, 17 si prova che:

P 18.

“Due fasci di raggi riferiti *prospettivamente* fra loro sono sempre “omografici: e se due fasci di raggi, non aventi il medesimo centro “ma però complanari, son trasformati omograficamente l'uno nel- “l'altro per modo, che il comun raggio corrisponda a sè stesso, “saranno altresì *prospettivi* fra loro.”

Fatti non molto dissimili occorrono in fasci di raggi e punteggiate non complanari, e in fasci di piani. Per es.:

P 19.

“ Tre punti distinti a, b, c d'una retta r sian proiettati da un'altra retta s , che non tagli r , secondo i piani α, β, γ : qualunque trasformazione omografica ν , che tenga fermo ciascuno di questi “ dovrà convertire in sè stesso ogni piano del fascio $s(r)$. „ [Siano d un punto arbitrario di r , u e v due punti distinti in s , δ il piano $s d$; e pongasi $r' \equiv vr$, $a' \equiv r'\alpha$, $b' \equiv r'\beta$, $c' \equiv r'\gamma$, $d' \equiv r'\delta$. I fasci $u(a, b, c, d)$, $v(a', b', c', d')$ saranno ambedue visuali d'una stessa punteggiata a'', b'', c'', d'' . Dunque esiste un'omografia (P 16) che al par di ν conduce i punti a, b, c nei punti a', b', c' e di più muta d in d' : per conseguenza (P 14) $d' = \nu d$, e poscia $\delta = \nu \delta$.]

* *

Per i consueti fini geometrici si può, anzi giova, restringer la classe dei punti proiettivi allo spazio proiettivo ordinario (in tre dimensioni) mediante il seguente principio (*):

(XVII)

“ Se a, b, c, d sono punti proiettivi non complanari, p è un punto proiettivo non situato in alcuno de' piani abc, abd, acd, bcd , dovrà esistere un punto comune alle figure ap, bcd . „

Sul fondamento dei soli principi I—XVII si regge la più parte delle proprietà proiettive circa le coniche, quadriche, cubiche sghembe, ecc., che formano, ad es., l'oggetto dei capitoli 6°-8°, 10°-12°, 14° (Parte 1ª) e 3°-5°, 12°-13° (Parte 2ª) nell'opera notissima di TH. REYE (**). Per altro non avrà fin qui significato (se non come definizione) il dire, ad es., che “ un'omografia, la quale

(*) Il qual sarà da rimuovere, quando si voglia estendere il concetto di punto proj.º allo spazio da n dimensioni, e allo “ spazio assoluto „: ved. p. e. m., §§ 11, 12. Per questo, dopo aver introdotta la nozione d' “ iperpiano proj.º d' n ª specie „, basterà sostituire al XII assioma di qui la premessa XI' di quel Saggio (ivi, pag. 58, P 7, 8); indi modificare il XV, p. es. così: “ Date le figure $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots a_{(n+2)}$ ed $a'_{(1)}, a'_{(2)}, \dots a'_{(n+2)}$ di $n+2$ punti ciascuna (n è un num.º int.º pos.º) e purchè non esista iperpiano d' $(n-1)$ ª specie che passi per $n+1$ punto d'una stessa figura, dovrà esistere un'omografia che tramuti, per ordine, i punti $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots a_{(n+2)}$ negli $a'_{(1)}, a'_{(2)}, \dots a'_{(n+2)}$. „

(**) Die Geom. der Lage, 2te Aufl., Leipzig 1882.

trasformi involutoriamente la retta r in sè stessa, non ha punti doppi, qualunque volta due coppie di punti omologhi in r si separino a vicenda „; nè si può ancor dimostrare, ad es., che “ dei tre punti diagonali d'un quadrangolo due sono *esterni*, uno è *interno* a qualsivoglia conica passante pei quattro vertici „. Ma queste ed altre lacune consimili saranno colmate appieno dai postulati XVIII e XIX.

P 20.

“ Di due coppie di punti (a, b) e (c, d) — tutti e quattro allineati e distinti — si dirà che ciascuna è, o non è, *separata dall'altra*, secondo che sulla retta non esiste, od esiste, alcun punto che sia trasformato in sè stesso da qualunque omografia μ per la quale $\mu a = b$, $\mu b = a$, $\mu c = d$ (quindi $\mu d = c$): v. P14 „. (Secondo che non esiste, od esiste, una coppia di punti armonici sì rispetto ad a e b , che rispetto a c e d : v. XVI.)

(XVIII)

$r \in [1] . a, b, c, d \in r . \text{num}(a \cup b \cup c \cup d) = 4 : \mu, \nu \in \Omega . \mu a = b . \mu b = a . \mu c = d : \nu b = c . \nu c = b . \nu a = d : r \cap \overline{x} \in (\mu x = x) = \Delta . \therefore \mathbf{O} . \mathbf{H} r \cap \overline{y} \in (\nu y = y) .$ “ Essendo a, b, c, d quattro punti distinti d'una retta r ; se μ, ν saranno omografie che conducano l'una i punti a, b, c nei punti b, a, d , l'altra i punti b, c, a nei punti c, b, d , e se μ non ha punti doppi (tautologhi) in r , “ ne avrà ν certamente. „ — O, in altra veste: “ se le coppie a, b e c, d si separano, per certo le b, c e a, d non si separano „.

(XIX)

$\text{Hp(XVIII)} : \rho \in \Omega . \rho c = a . \rho a = c . \rho b = d : \mathbf{O} . \therefore \mathbf{H} r \cap \overline{x} \in (\mu x = x) . \mathbf{H} r \cap \overline{y} \in (\nu y = y) : \mathbf{O} . r \cap \overline{z} \in (\rho z = z) = \Delta .$ “ Dati a, b, c, d, μ, ν , “ come sopra, e inoltre un'omografia ρ che trasformi ordinatamente “ c, a, b nei punti a, c, d : se tanto μ quanto ν comportano l'esistenza di punti doppi su r , non potrà darsi ch'esistan su r punti doppi per ρ . „ Vale a dire (P 20): “ se non si separan le coppie (a, b) e (c, d) , nè le (b, c) e (a, d) , si separan di certo le coppie (c, a) e (b, d) „. Ne viene, ad es., che “ quattro punti dati sopra una retta e distinti fra loro si possono sempre disporre, benchè ad un sol modo, in due coppie che si separino (in due coppie spettanti

ad una involuzione ellittica) „; e che “ se a, b, c siano punti allineati e distinti, l'armonico di c rispetto ad a, b è separato da c per mezzo di a e b „: vedi, per es., $\mathbf{m}_4$, pagg. 23-7. Ma indipendentemente dagli ultimi due postulati qui si può dimostrare un teorema, che in $\mathbf{m}_4$ è assioma XVII; vale a dire che:

P 21.

“ Se a, b, c, o, o' son punti diversi nella retta proiettiva r , e se “ i punti o, o' non separano la coppia (a, b) , nè la coppia (b, c) , “ neppur saranno separati dalla coppia (c, a) . „ [Sia x punto doppio (P20) nell'involuzione che le coppie di punti coniugati (o, o') ed (a, b) stabiliscono su r ; y sia punto doppio nell'involuzione (o, o') e (b, c) ; infine z sia il trasformato di b nell'involuzione (o, o') ed (x, y) . Presi fuor d' r a piacere i punti distinti A e B , purchè allineati con x , anche i punti $D \equiv Ab \wedge B o'$ e $C \equiv Ba \wedge A o$ verranno allineati con x , giusta le proprietà involutorie d'ogni quadrangolo. E posto $E \equiv A o \wedge D y$, $F \equiv D o \wedge E c$, saranno allineati fra loro anche i punti A, F, y . Ne viene che tanto il lato BE del quadrangolo $ABDE$, quanto CF del quadrangolo $ACDF$, passeranno per z : onde z sarà punto diagonale nel quadrangolo $BCEF$, ossia punto doppio nell'involuzione (o, o') ed (a, c) (*).]

*
*
*

La convenienza d'un qualche *principio di continuità* si fa innanzi, ad es., quando si voglia dar luogo a proposizioni come queste: “ Ogni trasformazione reciproca dello spazio in sè stesso (dei punti in punti) la quale muti ogni retta in una retta è un'omografia. „ — “ La classe $[0]$, o spazio proiettivo, è un continuo numerico reale. „ Ecc. Il passarsi di queste e d'altre relazioni consimili non sarebbe opportuno: ma non disdice l'evitarle al possibile per trattarne solamente all'ultimo, o quasi.

La prima di quelle due si può tosto ridurre (per ciò che precede) a quest'altra: “ Essendo r, r' due rette proiettive, ogni trasformazione armonica di r in r' — vale a dir reciproca e tale, che a quattro punti armonici coordini sempre quattro punti armonici —

(*) E ne rimane provata senz'altro la verità del teorema di PASCAL quanto all'esagono (degenere) $ABEDCF$: la qual poi, viceversa, coinvolge P21.

sarà un'omografia tra le medesime. „ Ma neppur qui si richiede propriamente il decidere sulla continuità della retta. Per giungere a quel risultato basterebbe infatti postulare un principio come il seguente :

P 22.

“ Dati sopra una retta proiettiva r i punti distinti a_0, a_1, a_2 :
 “ se x è un punto di r che non appartenga alla serie armonica
 “ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots$ — dove a_3 sia l'armonico dopo
 “ a_0, a_2, a_1 e in generale a_{k+1} , l'armonico di a_{k-1} rispetto ad
 “ a_0, a_k — qualunque trasformazione armonica, per cui resti
 “ fermo ciascuno dei punti a_0, a_1, a_2 (dunque ogni punto della
 “ serie) dovrà tener fermo x ancora. „ (*)

Ma un tal principio non sembra per sè sufficiente a confermare la seconda delle proposizioni suddette: per la quale conviene risolversi ad una premessa alquanto più restrittiva. Tale sarà, per es., il postulato del DEDEKIND reso in forma proiettiva, così:

(XX)

“ Essendo a, b, c punti di una retta proiettiva l'un l'altro distinti: se il segmento proiettivo (abc) (**) sarà diviso in parti h ,
 “ k , tali che ciascuna abbia in sè almeno un punto, e che, designando per x un punto qualunque di h e per y un punto qualunque di k , y stia sempre nel segmento (acx) : allora nel segmento (abc) dovrà esistere un punto z sì fatto che 1° ogni
 “ punto u di (abc) , purchè z appartenga al segmento (acu) , giaccia in h ; e 2° ciascun punto v di (abc) , purchè appartenente
 “ al segmento (acz) , sia punto di k . „

(*) Quel corpo di dottrine, che si svolgono da questo e dai precedenti assiomi (I)-(XIX), sarebbe dunque una Geom. proj. indipendente dalla continuità o discontinuità della retta (com'è intesa per solito): vale a dire un sistema, dove resterebbero contemplati implicitamente anche i punti così detti irrazionali, senza affermarne l'esistenza, od escluderla. Il che è tutt'altra cosa della Geom. nei soli punti razionali. — Che poi gli anzidetti principi (esclusa P22) siano indipendenti dalla verità o falsità dell'assioma XX, si prova per noti esempi.

(**) Vale a dire “ la somma de' punti — diversi da a e da c — che sulla retta non sono separati da b per mezzo di a, c (P20); aggiuntovi il punto b stesso „

Con questo per altro l'assioma poc' anzi suggerito in P22 (e che per contenuto si distingue appena dal teorema di STAUDT) diventa superfluo, cioè deducibile dalle premesse I-XX. E, a quanto sembra, una tal deduzione non è più semplice in questo sistema che nell'ordinario (vedi, per es., m_4 , § 10); non restando qui nullamente appianata da ciò che precede. — Nè sarebbe onesto tacere il difetto di simmetria che s'incontra volendo parlare delle *proiettività* in generale. Una retta punteggiata e un fascio di rette o di piani si potranno fin dal principio dichiarar proiettivi fra loro, se esista un'omografia che trasformi quella punteggiata in un'altra, sezione del fascio. Dopo ciò la correlazione — fra piani ad es. — si potrà definire per mezzo delle operazioni, onde vien costruita effettivamente per solito: e in ultimo — cioè dopo (XX), o anche sol dopo P22 — sarà da mostrare, qualmente una trasformazione siffatta sia la più generale fra quelle che mutano punti allineati d'un piano in rette concorrenti dell'altro; ecc.

*
* *

due sistemi equivalenti

Questa Nota ed il Saggio più volte citato ne porgono esempio di due sistemi deduttivi costruiti sì l'uno che l'altro a un medesimo effetto, quantunque con materiali e forme assai differenti: cioè con enti primitivi diversi e postulati diversi. Due così fatti sistemi saranno da aversi come equivalenti, se tutte le proposizioni spettanti all'uno (primitive, oppur derivate) siano vere nell'altro senza eccezioni o modificazioni di sorta; e viceversa. — Un distinguer netto fra gli enti primitivi (o semplici) e i lor derivati (o composti) consente anche questo vantaggio: di poter le più volte in pochi raffronti decidere sull'eguaglianza logica di due sistemi. Basta invero, anzi è necessario all'equivalenza, che gli enti primitivi di ciascun sistema si possano definire per quelli dell'altro; e che di poi le proposizioni primitive di ognuno sian conseguenza di quelle dell'altro. — E qui l'ente Ω e le proposizioni I-XX son predisposte in maniera, da sostener cotal prova.

Verrà fatto di chiedere: A che questi rimaneggiamenti formali, se il nuovo sistema può tener luogo all'antico, e viceversa; e nulla è nell'uno, che non trovi anche posto nell'altro?

Senza dire dell'interesse, che raramente è disgiunto da tutto che in qualche modo s'accosta ai principi del nostro sapere (come qui

alle radici di molte idee geometriche odierne) mi sia concesso ripetere col PASCH (*) che "diese Arbeit — die Ergründung des gegenseitigen Zusammenhang der gefundenen Sätze — dient nicht bloss der Befriedigung einer gelehrten Liebhaberei, sondern sie hat der Forschung fruchtbare Anregung gegeben, und neue Wege eröffnet „.

Torino, aprile 1898.

(*) Akad. Festrede — Giessen, 1894.

